Série N^{o}7 : Systèmes, systèmes de Cramer et systèmes inversibles

Exercice 1

1. Montrer que la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente et calculer son indice de nilpotence p. Calculer "$\exp(tN)$" pour tout réel t.
   *Montrer que le système $\{v, Nv, N^{p-1}v\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ pour tout vecteur non nul v de $\mathbb{R}^3$.
2. Vérifier que $(0,0,0,0,0)$ est solution du système
   $$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 & = & 0, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 & = & 0, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$
   Montrer que L'ensemble E des solutions $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$. Quelle est sa dimension ? Déterminer une base de E.
3. Vérifier que le système suivant est compatible
   $$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 & = & 3, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 & = & -4, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_5 & = & 9 \end{array}\right.$$
   puis le résoudre dans $\mathbb{R}^5$. L'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ est-il un plan vectoriel de $\mathbb{R}^5$?.

Exercice 2

On considère les trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sous la forme récurrente par $u_0 = 1$, $v_0 = 1$, $w_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par le système suivant

$$(\mathcal{S}) : \left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 2u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} & = & u_n + 2v_n + w_n \\ w_{n+1} & = & u_n + v_n + 2w_n \end{array}\right.$$

1. Écrire le système $(\mathcal{S})$ sous forme matricielle.
2. Soit A la matrice du système $(\mathcal{S})$. Calculer A^2 et A^3, puis en déduire u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, u_3, v_3 et w_3
3. Déduire les expressions des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de A, n et (u_0, v_0, w_0).

Exercice 3

On considère les trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sous la forme récurrente par $u_0 = 1$, $v_0 = 1$, $w_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par le système suivant

$$(\mathcal{S}) : \left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n + v_n - 3w_n \\ v_{n+1} & = & u_n - w_n \\ w_{n+1} & = & u_n - v_n \end{array}\right.$$

1. Écrire le système (S) sous la forme matricielle
   $$X_{n+1} = AX_n \quad \text{avec} \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

2. Montrer que A est inversible, puis calculer sa matrice inverse.
3. Soit P une matrice inversible telle que $B = P^{-1}AP$ où B est une matrice diagonale d'éléments diagonaux λ_1, λ_2 et λ_3. Monter que $B^n = P^{-1}A^nP$.
4. Calculer A^2 et A^3.
5. En déduire les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de $n \in \{1, 2\}$.

Exercice 4

On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. Soit $(\mathcal{S})$ le systeme differentiel lineaire avec second membre

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x'(t) &=& 3x(t) + 9y(t) - 9z(t) \\ y'(t) &=& 2x(t) \\ z'(t) &=& 3x(t) + 3y(t) - 3z(t) \end{cases}$$

où x, y et z sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $t \in \mathbb{R} \longmapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

1. Calculer B^2 et B^3, puis calculer $\exp(tB)$
2. Ecrire le système différentiel linéaire $(\mathcal{S})$ sous la forme $X'(t) = A.X(t)$ où A est une matrice à déterminer.
3. Déterminer toutes les solutions du système $(\mathcal{S})$. Que peut-on déduire ?